Liban ES 2013 correction

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Parmi toutes les fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dont l'expression algébrique est donnée ci-dessous, la seule qui est convexe est :

   On sait que la fonction logarithme népérien est concave, que la fonction exponentielle est convexe donc son opposé sera concave.

   on calcule alors la dérivée seconde des fonctions $f''_a(x) = 6x - 6$ et $f''_d(x) = 6$.

   Seule la fonction $f_d(x)$ a une dérivée positive sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc la bonne réponse est d.

2. On calcule les dérivées des fonctions proposées en éliminant les fonctions des réponses a et d.

   On a $F'_b(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x - 1 + 1 = \ln x$. La bonne réponse est donc b

3. On détermine une primitive de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{2x} = \dfrac{1}{2}2\mathrm{e}^{2x}$.

   On reconnait la forme $u'\mathrm{e}^u$ dont la primitive est e^u.

   On a donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ et par suite $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{\mathrm{e}} = F(\mathrm{e}) - F(0) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^0 = \dfrac{1}{2}\left\lceil \mathrm{e}^2 - 1 \right\lceil$.

   La bonne réponse est donc d.

4. On détermine à la calculatrice la valeur de $P(2 \leqslant X \leqslant 3)$ sachant que X suit une loi normale $\mathcal{N}(1\ ;\ 2^2)$ soit $P(2 \leqslant X \leqslant 3) \approx 0,15$.

   La bonne réponse est donc la question a.

5. On sait qu'un intervalle de confiance au seuil de 95% est de la forme $\left]f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

   On a $f = \dfrac{55}{100}$ et $n = 100$ soit $[0,55 - 0,1\ ;\ 0,55 + 0,1] = [0,45\ ;\ 0,65]$.

   La bonne réponse est donc la réponse c.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. On calcule $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0,9u_n + 1,2 - 12 = 0,9u_n - 10,8 = 0,9(u_n - 12) = 0,9v_n$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 12 = -2$

   b. En appliquant les formules sur les suites géométriques, on aura : $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times 0,9^n$

   c. On a $v_n = u_n - 12$. soit $u_n = v_n + 12$ et donc pour tout n, $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$.

2. Comme la raison de la suite (v_n) est comprise entre 0 et 1, la limite de la suite (v_n) est donc nulle.

   Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n + 12 = 12$.

Partie B

1. La diminution de 10% de la population de la ville peut se traduire par le coefficient multiplicateur $0,9$ soit $0,9u_n$ auquel il faut ajouter les 1 200 nouveaux habitants soit $1,2$ milliers.

   On obtient donc bien $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2$

2. On rajoute dans la boucle Pour la relation de récurrence soit

   a prend la valeur $0,9a + 1,2,$;

   a prenant la valeur du terme de la suite cherchée.

3. a. $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5 \Leftrightarrow -2 \times 0,9^n > -0,5$

   On multiplie l'inégalité par -1 donc on change le sens de l'inégalité soit

   $2 \times 0,9^n < 0,5 \Leftrightarrow 0,9^n < 0,25$.

   La fonction logarithme étant strictement croissante, on obtient :

   $\ln(0,9^n) < \ln(0,25) \Leftrightarrow n\ln(0,9) < \ln(0,25)$.

   $\ln(0,9)$ étant négatif, on aura $n > \dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,9)}$ soit $n > 13,15$.

   Les solutions de l'inéquation sont donc les entiers naturels supérieur à 14.

   b. La population de Bellecité sera supérieur à 11,5 milliers d'habitants à partir de l'année $2012+14$ soit 2026.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5 ; 60]$ par :

$$C(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,1x} + 20}{x}.$$

1. C est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $[5;60]$ et on a :
   $C'(x) = \dfrac{0,1\mathrm{e}^{0,1x} \times x - (\mathrm{e}^{0,1x} + 20) \times 1}{x^2} = \dfrac{0,1x\mathrm{e}^{0,1x} - \mathrm{e}^{0,1x} - 20}{x^2}$

2. On considère la fonction f définie sur $[5 ; 60]$ par

$$f(x) = 0,1x\mathrm{e}^{0,1x} - \mathrm{e}^{0,1x} - 20.$$

   a. f est dérivable sur $[5;60]$ comme produit de fonction dérivable et

   $f'(x) = 0,1\mathrm{e}^{0,1x} + 0,1x \times 0,1\mathrm{e}^{0,1x} - 0,1\mathrm{e}^{0,1x} = 0,1x\mathrm{e}^{0,1x}$.

   Comme $x \in [5 ; 60]$ et qu'un exponentielle est toujours positif, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [5 ; 60]$ et par suite, f est croissante.

   b. Comme f est continue, strictement croissante, que $f(5) \approx -20,82$, $f(60) \approx 1997,1$ et $0 \in [f(5) ; f(60)]$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance, l'équation $f(x) = 0$ aura une unique solution α sur $[5 ; 60]$.

   c. En utilisant la calculatrice, comme $f(25) \approx -1,726$ et $f(26) \approx 1,5419$, on a l'encadrement suivant : $25 \leqslant \alpha \leqslant 26$.

d. f étant strictement croissante, $f(x)$ sera négatif sur $[5,\alpha]$ et positif sur $[\alpha;60]$

3. Le signe de $C'(x)$ dépend du signe de $f(x)$ car $C'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	5		α		60
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$C(5)$	$\searrow$	$C(\alpha)$	$\nearrow$	$C(60)$

Avec $C(5) \approx 4,32$; $C(\alpha) \approx 1,3$ et $C(60) \approx 7,05$

4. a. L'équation $C(x) = 2$ admet deux solutions, l'une dans l'intervalle $[5\ ;\ \alpha]$ l'autre dans l'intervalle $[\alpha\ ;\ 60]$.

   b. L'équation $C(x) = 5$ admet une solutions dans l'intervalle $[\alpha\ ;\ 60]$

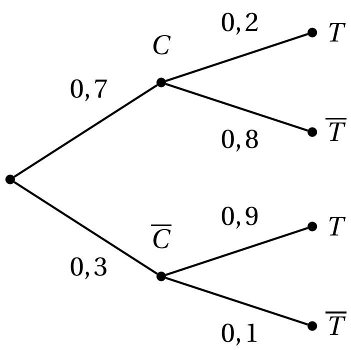
Partie B

LA fonction C admet un minimum en α, le nombre de vélo à produire sera donc soit 25 soit 26.

Comme $C(25) \approx 1{,}287\,3$ et $C(26 \approx 1{,}287\,1$, le coût moyen minimal sera atteint pour une production de 26 vélos.

Exercice 4 **5 points**

1. A l'aide des données du texte, on obtient l'arbre suivant :



2. On cherche $P(C \cap T) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$

3. C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, donc d'après les probabilités totales,

   $P(T) = P(C \cap T) + P(\overline{C} \cap T) = 0,14 + 0,3 \times 0,9 = 0,41$

4. On cherche $P_T(\overline{C}) = \dfrac{P(T \cap \overline{C})}{P(T)} = \dfrac{0,3 \times 0,9}{0,41} = \dfrac{27}{41}$

5. On obtient le tableau de la loi de porbabilité de X en s'aidant des données de l'arbre :

X_i	0	6	10
$P(X = X_i)$	$0,7 \times 0,8 + 0,3 \times 0,1 = 0,59$	0,14	$0,3 \times 0,9 = 0,27$

6. $E(X) = 0 \times 0,59 + 6 \times 0,14 + 10 \times 0,28 = 3,54$

7. Chaque terrain rapporte en moyenne 3,54 € pour une heure d'utilisation, le gain moyen hebdomadaire des 10 terrains sera donc de $10 \times 70 \times 3,54 = 2\,478$ €.